

Universidad de Ciencias Médicas de la Habana
Faculta de Tecnología de la Salud

JORNADA CIENTÍFICA ESTUDIANTIL

Modelación de función interpolante para los percentiles de crecimiento en edades pediátricas

Autores:

Lázaro Daniel González Martínez ¹

Dalila Cárdenas Hernández ²

Carlos Rafael Araujo Inastrilla ³

Tutores:

MSc. Yanet García Serrano

La Habana

2023

¹ Estudiante de cuarto año de la carrera Lic. en Ciencias de la Computación. Universidad de La Habana. Facultad de Matemática y Computación. La Habana. Cuba. lazarodaniel.glezmtnz@gmail.com

² Estudiante de quinto año de la carrera Lic. en Nutrición. Universidad de Ciencias Médicas de La Habana. Facultad de Tecnología de la Salud. La Habana. Cuba. dalilacardenashernandez@gmail.com

³ Estudiante de quinto año de la carrera Lic. en Sistemas de Información. Universidad de Ciencias Médicas de La Habana. Facultad de Tecnología de la Salud. La Habana. Cuba. carlosinastrilla@nauta.cu

RESUMEN

Introducción: los especialistas de la nutrición para evaluar el estado nutricional en edades pediátricas desde el punto de vista antropométrico, utilizan las gráficas de las curvas percentiles para clasificar al individuo. En la actualidad se encuentran en un formato digital muy deteriorado, que posibilita la ocurrencia de mediciones erradas. Surge la necesidad de informatizar estos datos para facilitar mediciones más acertadas. Objetivo: modelar una función interpolante sobre los datos de los percentiles de crecimiento. Método: se realizó una investigación aplicada, donde se utilizaron métodos analíticos y de regresión para aproximar la frontera condicionada de la interpolación por *Splines* Cúbicos. Para computar las curvas se utilizó el lenguaje de programación Python. Resultados: se realizó la interpolación gráfica de los valores conocidos, y se estimó el margen de error. Se realizaron las extracciones sobre las vecindades de los extremos de algunas curvas. En cuanto a las aproximaciones para las curvas “Peso/Edad”, “Talla/Edad”, “Peso/Talla”, y “IMC/Edad”, no se apreciaron diferencias al proyectar la función, por lo que los métodos aplicados fueron efectivos. Conclusiones: se modeló la función que describe las curvas de percentiles. Esto facilitará las mediciones bajo las condiciones de precisión que los especialistas y estudiantes afines a la nutrición deben desarrollar.

Palabras clave: Interpolación por *splines*; Regresión; Percentil; Crecimiento.

INTRODUCCIÓN

La valoración nutricional es un proceso que permite determinar el estado nutricional de un paciente, donde se interpretan los resultados bioquímicos, antropométricos y/o clínicos.¹ Por lo general estas observaciones se comparan con una población de referencia, y sobre las diferencias, los especialistas nutriólogos toman acciones sobre sus pacientes.

La valoración del estado nutricional se realiza a cualquier individuo, sin embargo, a los niños y adolescentes de entre un día de nacidos hasta los 18 años, se les suele hacer un mayor seguimiento de sus comportamientos. Para realizar esta evaluación antropométrica los especialistas se apoyan en las curvas de percentiles de los indicadores a estudiar (peso para la edad, talla para la edad, peso para la talla, índice de masa corporal, área de músculo, área de grasa, circunferencia del brazo, circunferencia de la cintura) y se observa el rango o categoría en que se puede clasificar al individuo.

Los percentiles permiten comparar el resultado individual con una población de referencia. Entre los años 1972-1974 en Cuba se realizó un estudio estadístico para conformar una población de referencia para su empleo en el sector de la salud con individuos en el rango de edades pediátricas.^{2,3}

En el período donde se obtuvo la población de referencia, no había un desarrollo tan amplio en cuanto a la obtención de curvas para describir los percentiles de los patrones de crecimiento, y bajo las indicaciones en "*Notes on the statistics of growth standards*"⁴ se pudo realizar la investigación que obtuvo como resultados los datos que se mantienen vigentes para las consultas clínicas.

Acerca de la utilización de las curvas de percentiles, los autores del presente estudio han identificado que el manejo de estas se realiza con versiones impresas de las mismas, en ocasiones en condiciones de deterioro. Esto propicia la ocurrencia de mediciones inexactas, independientes de los errores humanos que pueden suceder realizar la medición en dicha gráfica.

Además, en la observación detallada de estas curvas, se aprecian errores en el trazado tanto de las líneas guía, como de las propias curvas de percentiles. Incluso, en su formato digitalizado (no computable) también presenta estas fallas. En este sentido, es necesario reelaborar con mayor calidad las curvas, a partir de los datos

resultantes del estudio Jordán et al. ². Sin embargo, se desconoce la construcción exacta de estas curvas, debido a que dichos datos no están disponibles de manera abierta en fuentes conocidas.

Es necesario optar por soluciones informáticas al trabajo de los especialistas de la nutrición con las curvas de percentiles. De manera que esto sea garantía de mayor precisión y exactitud en la medición antropométrica. No obstante, es necesario asumir el reto de la reconstrucción de las curvas de percentiles a partir de los datos que las describen originalmente.

Sobre esta base, los autores se plantean como problema científico: ¿Cómo construir en soporte digital computable los percentiles de crecimiento para edades pediátricas? El mismo será viabilizado hacia la solución mediante el objetivo: modelar una función interpolante sobre los datos de los percentiles de crecimiento para edades pediátricas.

OBJETIVO

Modelar una función interpolante sobre los datos de los percentiles de crecimiento para edades pediátricas.

DISEÑO METODOLÓGICO

Se realizó una investigación aplicada, en la Facultad de Tecnología de la Salud, de la Universidad de Ciencias Médicas de la Habana, en el período de enero a abril del 2022. En el mismo se utilizaron métodos analíticos y de regresión para aproximar la frontera condicionada de la interpolación por *Splines* Cúbicos.

La población del estudio incluyó 70 mediciones de las curvas de Peso/Edad (P/E), Talla/Edad (T/E), Peso/Talla (P/T), y IMC/Edad (IMC/E), realizadas por un grupo de 35 estudiantes de la Licenciatura en Nutrición, de la Facultad de Tecnología de la Salud, colaboradores con el estudio.

Se utilizó la interpolación por *splines* cúbicos, la cual es una técnica matemática que permite construir una curva suave y continua que se ajusta a un conjunto de puntos conocidos. El método de interpolación por *splines* cúbicos constó de varios pasos, los cuales se describen a continuación:

En un primer paso, se recopilan datos de la función en puntos específicos conocidos. Estos puntos fueron obtenidos a partir de mediciones experimentales, donde cada uno de los colaboradores realizó una serie de mediciones según se les indicó, y dichos datos fueron obtenidos mediante la observación científica y copiados mediante un instrumento diseñado para esta finalidad. Una vez recolectados los datos, se emplearon métodos del nivel matemático para la modelación de las curvas.

Una vez que se tienen los puntos conocidos, se utiliza la técnica de interpolación por *splines* cúbicos (anexo 1) para modelar la función entre los puntos conocidos. Esta técnica consiste en construir polinomios cúbicos en cada intervalo entre dos puntos conocidos, de tal manera que la curva resultante sea suave y continua en todo el rango de la función.⁵

Posteriormente, se aproximan las derivadas laterales (anexo 2) de la función en los puntos extremos mediante la técnica de regresión. Esto permite obtener información sobre la pendiente de la curva en esos puntos, lo que es fundamental para garantizar la validez del modelo. (Anexo 3).

Para garantizar que la función sea suave y continua en todo su dominio, se establecen condiciones de fronteras naturales. Estas condiciones aseguran que la curva resultante tenga una forma natural y coherente con la relación entre las variables.⁶

Finalmente, se evaluó la precisión y validez del modelo mediante comparación con datos adicionales y análisis estadísticos.

Para computar las curvas se utilizó el lenguaje de programación Python.

Para poner en práctica los métodos explicados anteriormente se hicieron pruebas previas con una colección de datos más abarcadora. Se utilizaron las tablas de datos para la evaluación nutricional de niños y adolescentes de Chile, recogidas en 2018.⁸

Para las tablas donde la “Edad” es la variable independiente, se tienen los valores por mes. Por lo tanto, si se realizan interpolaciones con los valores anuales, se puede contrastar el error de proximidad de los restantes meses con la aproximación realizada. De forma similar para la tabla que tiene la “Talla” como variable independiente (en *cm*), los valores están espaciados por 0,5 *cm*, por lo que se pudiera tomar los valores enteros exactos para hacer la interpolación y los restantes para comprobar el error de aproximación.

En la práctica se realizaron diferentes cortes de los intervalos para tomar cantidades de puntos equidistantes y hacer el análisis no tan solo para comparar los resultados según los métodos usados, sino también según los intervalos seleccionados. Las medidas para el error empleada son las propuestas en por Sauer ⁷ para medir el error de la regresión por mínimos cuadrados.

RESULTADOS

En la figura 1A se muestra la interpolación realizada de manera experimental con los métodos de derivada lateral, el método de regresión y la interpolación con condiciones naturales de frontera. Visualmente no se nota diferencia alguna, por lo que aparentemente los 3 métodos ofrecen buenos resultados. Sin embargo, en el comportamiento del error (figura 1B), se hace más visible reconocer que el método de regresión cuenta con una mejor aproximación.

Para la norma y el error estándar (SE) se acotaron las medidas con 1 para que se pudiera apreciar el mapa de calor más fácil, así como para descartar resultados muy malos. (Figura 1C y D). En cambio, para el error cuadrático medio (*RMSE*) se acotaron las medidas con 0.1. (Figura 1E).

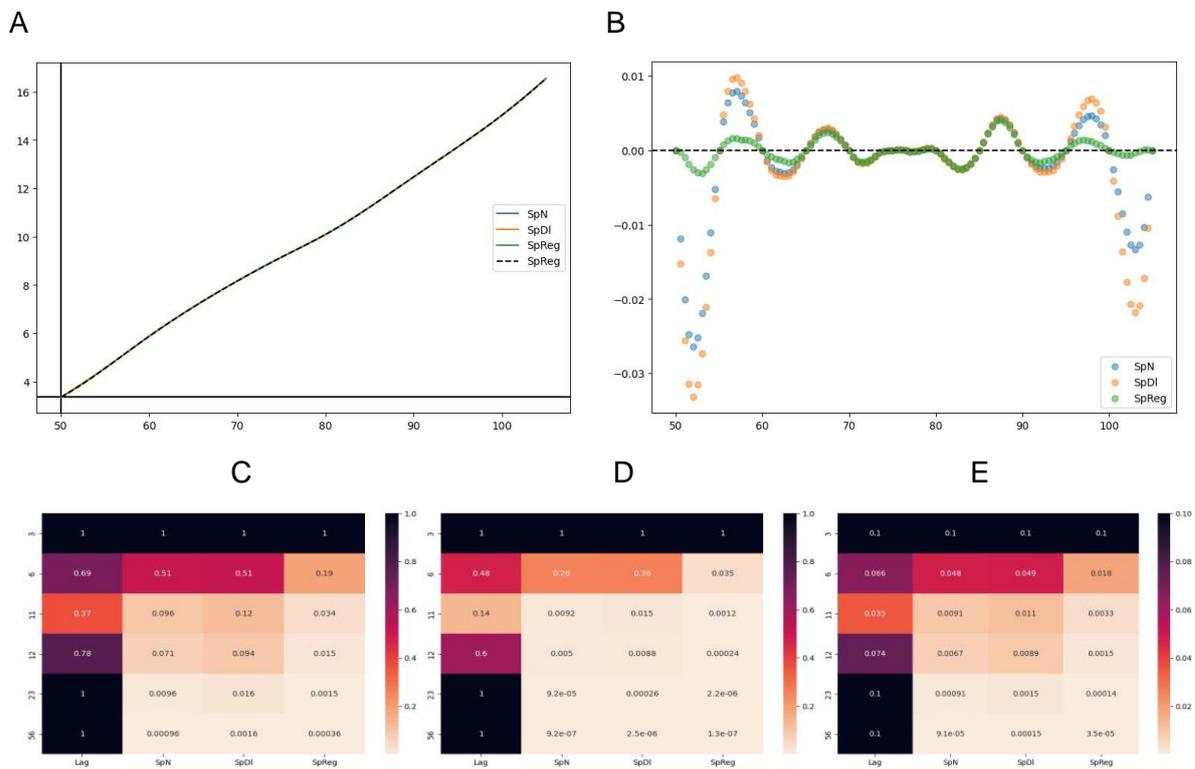


Figura 1. A: Resultados de los métodos de interpolación con 12 nodos aplicados sobre la tabla de P/T de niñas hasta los 2 años. **B:** Error de los métodos de interpolación con 12 nodos aplicados sobre la tabla de P/T de niñas hasta los 2 años. **C:** Norma del error (≤ 1) de los métodos aplicados sobre la tabla de P/T de niñas hasta los 2 años. **D:** *SE* (≤ 1) de los métodos aplicados sobre la tabla de P/T de niñas hasta los 2 años. **E:** *RMSE* (≤ 0.1) de los métodos aplicados sobre la tabla de P/T de niñas hasta los 2 años.

Las filas de interés son aquellas que cuentan con entre 8 o 22 nodos de interpolación aproximadamente, ya que son la cantidad real de datos disponibles para hacer la

interpolación final. En las filas donde se usaron 6,11,12 y 23 nodos, se puede notar que el método de regresión supera sin discusión alguna los otros métodos; y que la interpolación global ofrece pésimos resultados como se estimó en un principio. (Figura 1C,D y E).

Luego de tener los resultados experimentales se decidió hacer la interpolación final de las tablas de datos de Cuba utilizando el método de regresión. (Figura 2).

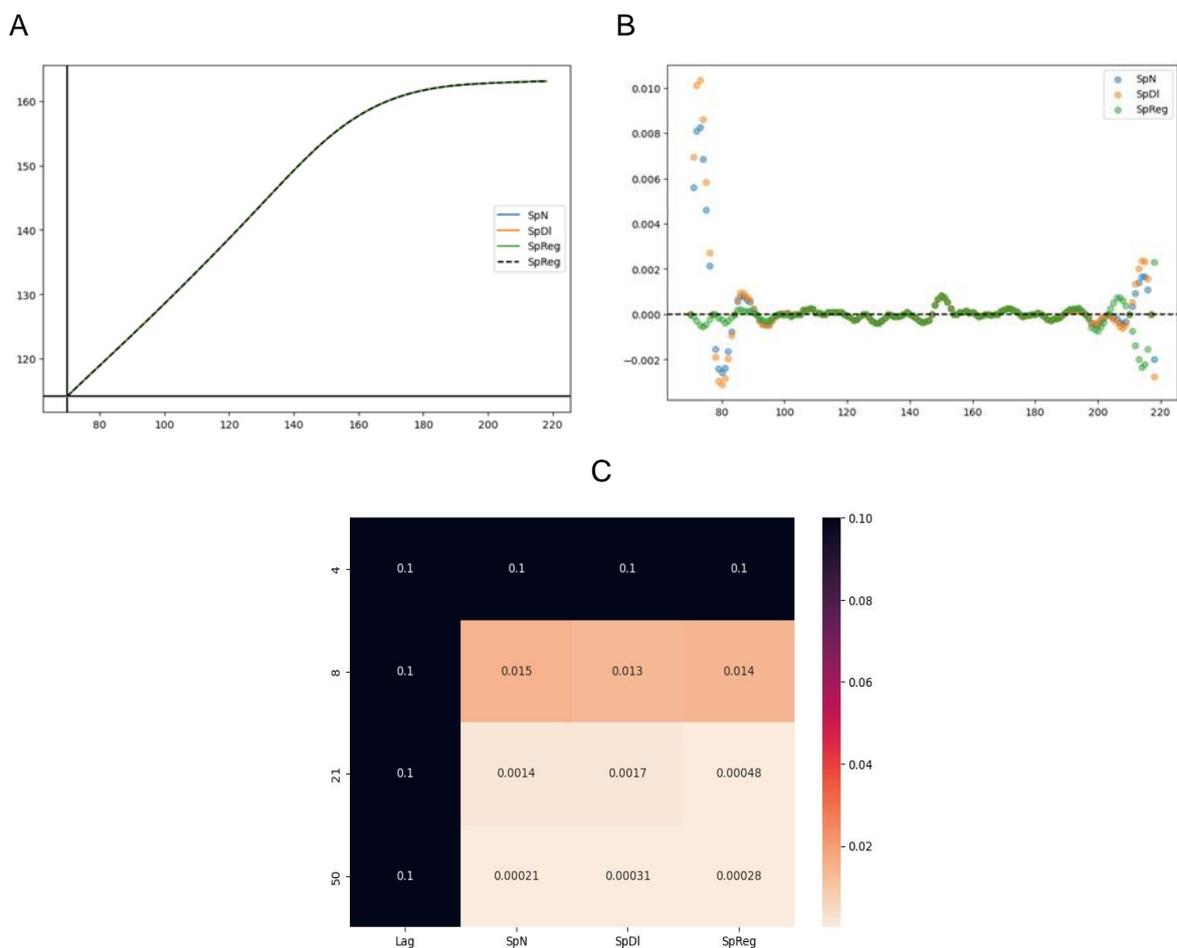


Figura 2. A: Resultados de los métodos de interpolación con 21 nodos aplicados sobre la tabla de T/E de niñas de 5 a 19 años. **B:** Error de los métodos de interpolación con 21 nodos aplicados sobre la tabla de T/E de niñas de 5 a 19 años. **C:** RMSE (≤ 0.1) de los métodos aplicados sobre la tabla de P/T de niñas hasta los 2 años.

Se realizó una extracción de puntos de las gráficas, de los cuales se conocían sus valores a partir de la observación. Se estimó el margen de error de las mediciones. Posteriormente se realizaron las extracciones sobre las vecindades de los extremos de algunas curvas. En este caso el ϵ utilizado para la vecindad de los puntos extremos fue de 0.75, sobre las curvas cuyas abscisas eran la Edad medida en años. Y los

puntos que se pidieron extraer de estas vecindades fueron 7, centrados en el punto extremo, y equidistantes (Figura 3).

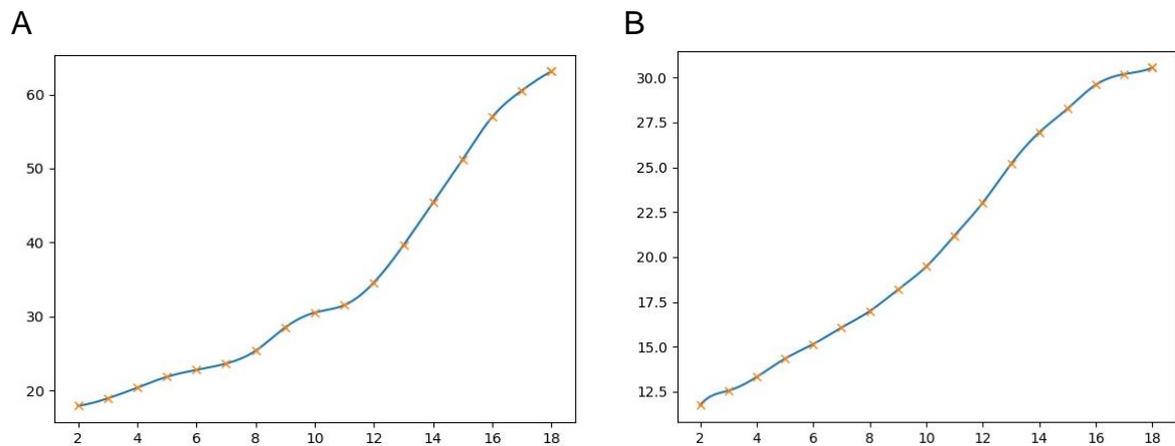


Figura 3. A: Gráfico obtenido del percentil 97 del IMC/E en varones cubanos de 2 a 18 años. **B:** Gráfico obtenido del percentil 50 del Área de músculo/E en varones cubanos de 2 a 18 años.

Se comprobó que el modelo es efectivo y confiable para estimar valores entre los puntos conocidos. El trabajo realizado arrojó muy buenos resultados para el método propuesto usando una aproximación de la primera derivada con la derivada de una regresión polinómica de grado 3 para un conjunto de puntos próximos a la función original, centrado sobre los puntos extremos.

DISCUSIÓN

La modelación digital de los percentiles pediátricos es una necesidad en el campo de la nutrición. Esto responde a uno de los propósitos establecidos por la Organización Mundial de la Salud (OMS), que apuesta por el uso de tecnologías móviles e inalámbricas en el apoyo del cumplimiento de metas en salud y bienestar de las personas.⁹

Existen precedentes de esfuerzos por implementar soluciones para la evaluación antropométrica pediátrica que incluyan el uso de las TIC por las facilidades que ofrece. Salazar-Acosta et al.¹⁰ propone una aplicación móvil para el seguimiento del crecimiento y cuidado nutricional de lactantes, con el fin de estudiar su potencial como herramienta digital de apoyo a padres en el cuidado nutricional de los niños desde el hogar.

Sin embargo, las aplicaciones más populares según reseña la literatura están enfocadas a la educación parental y a la alimentación infantil, pero están desligadas del seguimiento del crecimiento.¹¹ La integración de este componente es una contribución por la cual se aboga en este estudio.

Otras aplicaciones desarrolladas si realizan estas funciones, incluido el cálculo de percentiles y otros indicadores para el conjunto de mediciones antropométricas más críticas. Se pueden citar: Ped(z)¹² y Child Growth Tracker¹³ entre las utilizadas para el cálculo de percentiles en lactantes. Por otra parte, desarrolladas por la OMS, también existen las aplicaciones WHO Anthro©® y WHO Anthro Plus©®, concebidas para el monitoreo de las curvas de crecimiento y desarrollo de niños y adolescentes desde los 0 años de edad hasta los 19 años.^{14,15}

Ante esta necesidad, y a tono con las tendencias actuales; disponer de los datos de las curvas de percentiles en soporte digital computable es fundamental para el trabajo eficiente con los percentiles pediátricos y su uso en la atención médica y la investigación en salud infantil. Al ser digitalmente accesibles y procesables, los percentiles pediátricos pueden ser utilizados para monitorear el crecimiento y el desarrollo infantil, identificar problemas de salud temprano y mejorar la calidad de la atención médica.

El presente estudio, aplicó la interpolación por *splines* en la re-modelación de las curvas, donde fue evidente es la superioridad del método de regresión, sobre los otros métodos empleados. Además, se obtuvo como resultado que el empleo de una

vecindad alrededor de los puntos extremos para hacer las regresiones, debía escogerse mayor que el error que puedan tener los puntos de la regresión con respecto a la función original.

Este método permitió obtener una curva suave y continua que refleja el patrón de crecimiento típico de la población infantil, lo que facilita la interpretación de los resultados y la detección de posibles desviaciones del crecimiento normal. La interpolación por *splines* es una técnica ampliamente utilizada en la elaboración de tablas y gráficos de percentiles, y su precisión y validez han sido ampliamente demostradas en estudios científicos.¹⁰

Se pudo aprobar el empleo de las curvas obtenidas para hacer las mediciones bajo las condiciones de precisión que los profesionales y estudiantes afines, requieren para hacer las mediciones.

Los resultados sientan la base para el diseño y elaboración de programa informático que permita a los especialistas en nutrición y las áreas que convergen con esta, el uso preciso y rápido de estas curvas. De esta manera se evita en gran medida el error humano que puede ocurrir en las mediciones que se realizan manualmente; y suprime los errores en la calidad de las líneas, visibles en las impresiones de las gráficas actuales que se emplean. Los autores asumen el compromiso de perfilar de manera más detallada en otros estudios, el proceso de desarrollo de este programa, donde se pretende caracterizar el proceso de diseño conceptual, lógico y físico.

Los resultados esperados en este proyecto futuro se centran en la automatización y humanización del proceso de cálculo de los percentiles de crecimiento y en una mayor rapidez y precisión en los resultados.

La solución informática que se proyecta realizar, podría integrarse a los Sistemas de Información de Salud electrónicos y aplicaciones de registros clínicos. También facilitaría el desarrollo de herramientas de análisis estadístico más avanzadas, como modelos de regresión, predictivos y análisis de tendencias, que pueden ser útiles para detectar patrones y cambios en la salud infantil a lo largo del tiempo.

La propuesta está sustentada en los datos vigentes desde la década de 1980. Un elemento a considerar es la antigüedad de esta población de referencia. Esta fue concebida hace décadas y no necesariamente reflejan la diversidad cultural de la población actual. Resultaría conveniente una actualización del estudio que da origen a los datos para emplear los algoritmos actuales de regresión que son usados en la

estadística nutricional y obtener las curvas lo más exactas posibles. Sin embargo, las características de este estudio no permiten que sea factible su ejecución en cuestiones económicas y de tiempo. Una modelación de los datos de los percentiles pediátricos permite una mayor flexibilidad en la selección de las poblaciones de referencia y en la inclusión de datos más actualizados y representativos de la población actual.

En resumen, la modelación digital de los percentiles pediátricos es una herramienta necesaria para mejorar la precisión y accesibilidad en la medición de la salud infantil, así como para actualizar y mejorar la calidad de las poblaciones de referencia utilizadas en la práctica clínica.

CONCLUSIONES

Se modeló la función que describe las curvas de percentiles. Esto facilitará las mediciones bajo las condiciones de precisión que los especialistas y estudiantes afines a la nutrición deben desarrollar.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Domínguez-Alvarez D, Zayas-Torrientes G, Puentes-Marquez, I. Manual de Nutrición Clínica y Dietoterapia. Plaza de la Revolución, Cuba: Lazo Adentro; 2015.
2. Jordan J, Bebelagua A, Ruben M, Hernández J. Investigación nacional sobre crecimiento y desarrollo, Cuba 1972-1974. Rev. cuba. pediatr. 1977:367-390.
3. Jordán J, Rubén M, Berdasco A, Vega RDL, Jiménez JM, Mesa D, Hernández J. Investigación Nacional sobre Crecimiento y Desarrollo, Cuba 1972-1974 III: normas nacionales de peso y talla. Rev. cuba. pediatr. 1978:425-450.
4. Healy MJR. Notes on the statistics of growth standards. Annals of Human Biology. 1974;1(1):41-46.
5. Cole TJ, Pamela JG. "Smoothing reference centile curves: the LMS method and penalized likelihood." Statistics in medicine. 1992;11(10): 1305-1319.
6. Burden RL, Douglas-Faires J, Burden AM. "Numerical analysis". Cengage learning; 2015.
7. Sauer T. "Numerical analysis". 3a ed. Pearson; 2019.
8. Patrones de crecimiento para la evaluación nutricional de niños, niñas y adolescentes, desde el nacimiento hasta los 19 años de edad. Santiago, Chile: Ministerio de Salud; 2018.
9. Salazar-Acosta I, Rugeles-Estupiñan AM, Quintero-Lesmes DC, Castro Monsalve JM. Aplicación móvil para el seguimiento del crecimiento y cuidado nutricional del bebé en hogares colombianos. Salud UIS. 2023; 55: e23002. doi: <https://doi.org/10.18273/saluduis.55.e:23002>
10. Dai J, Moral-Arce I, Sperlich S. Calibrated estimation of a nonparametric income distribution from a few percentiles. Proceedings 59th ISI World Statistics Congress. 25-30 August 2013.
11. Cheng H, Tutt A, Llewellyn C, Size D, Jones J, Taki S, et al. Content and Quality of Infant Feeding Smartphone Apps: Five-Year Update on a Systematic Search and Evaluation. JMIR Mhealth Uhealth. 2020;8(5):e17300. DOI: <https://doi.org/10.2196/17300>
12. Gräfe D. Ped(z) - Pediatric Calculator, 2021. Disponible en: <https://www.pedz.de/en/calculators.html>

13. ABQ App Source L. Child Growth Tracker. 2021. Disponible en:
<https://childgrowthtracker.com/>.
14. WHO Anthro Survey Analyser and other tools. World Health Organization. Geneva: 2020. Disponible en: <https://www.who.int/toolkits/childgrowth-standards/software>
15. Growth reference data for 5-19 years. World Health Organization. Geneva: 2020. Disponible en: <https://www.who.int/toolkits/growthreference-data-for-5to19years/application-tools>

ANEXOS

Anexo 1

DEFINICIÓN DE SPLINE CÚBICO

Dada una función f definida en $[a,b]$ y un conjunto de nodos $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, un interpolante de spline cúbico S para f es una función que satisface las siguientes condiciones:

1. $S(x)$ es un polinomio cúbico, que se denota $S_j(x)$, en el subintervalo $[x_j, x_{j+1}]$ para cada $j = 0, 1, \dots, n-1$
2. $S_j(x_j) = f(x_j)$ y $S_j(x_{j+1}) = f(x_{j+1})$ para cada $j = 0, 1, \dots, n-1$
3. $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$ para cada $j = 0, 1, \dots, n-2$
4. $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$ para cada $j = 0, 1, \dots, n-2$
5. $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$ para cada $j = 0, 1, \dots, n-2$
6. Condición de frontera:
 - a) $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ (frontera natural o libre)
 - b) $S'(x_0) = f'(x_0)$ y $S'(x_n) = f'(x_n)$ (frontera condicionada)

Anexo 2

APROXIMACIÓN DE LA DERIVADA LATERAL

La derivada de una función f en a se define mediante el límite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) \quad (1)$$

Teniendo los puntos $(a, f(a))$ y $(a+h, f(a+h))$, la pendiente de la recta que pasa por dichos puntos tiene la forma:

$$m_a = \frac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (2)$$

De esta manera, analíticamente a medida que h disminuye se puede aproximar (1) con (2):

$$f'(a) \approx m_a = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (3)$$

El asumir que f tiene derivada en a garantiza que las derivadas laterales existen y son iguales a la derivada en a , es decir:

$$f'(a) = f'_+(a) = f'_-(a) \quad (4)$$

De esta forma se puede realizar una aproximación de $f'_+(a)$ Y $f'_-(a)$ mediante (3) para $h > 0$ y $h < 0$ respectivamente cuando su valor modular es pequeño.

CÁLCULO DE LA APROXIMACIÓN DE LA DERIVADA LATERAL

En la práctica se realizó la aproximación utilizando el punto conocido más cercano a los puntos extremos. Con el conjunto de datos de prueba, los nodos seleccionados para la interpolación no son todos los datos que se tienen. Existen puntos intermedios en cada sub-intervalo, con los que se estimó el error de la interpolación. Los intervalos extremos S_0 y S_n cuentan con estos puntos internos también.

Basado en la teoría descrita anteriormente se usarán los puntos más cercanos a x_0 y x_n . De esta forma tomando h como la distancia entre estos, se hace empleo de (3) y (4), obteniendo $f'_+(x_0) \approx m_{x_0}$ y $f'_-(x_n) \approx m_{x_n}$.

Se realizó la interpolación con splines cúbicos asumiendo las condiciones: $f(x_0) = mx_0, f(x_n) = mx_n$

Anexo 3

APROXIMACIÓN DE LA DERIVADA CON REGRESIÓN

A partir de la suposición de que se conocen puntos de la forma (x_i, y_i) alrededor del punto en que se desea conocer su derivada, y a su vez cercanos a la función f .

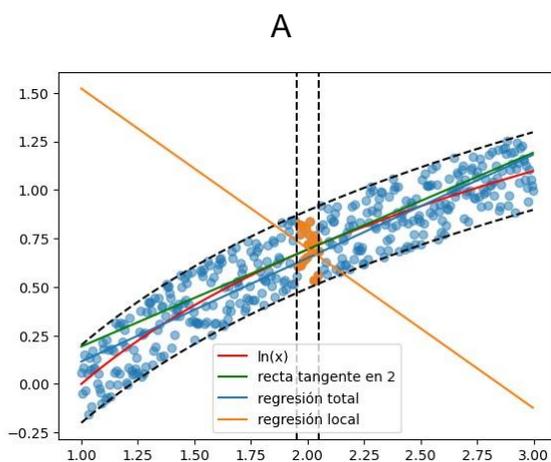
Se realizó la aproximación de estos mediante un polinomio para obtener la derivada de este en el punto seleccionado. Los puntos mencionados son los puntos cercanos a la curva en un entorno de x_0 o x_n . Entonces, sea c el punto al que se desea aproximar se realiza la siguiente suposición:

$$P_c = \{(x_i, y_i) | x_i \in I = [a, c] \cup [c, b] \wedge f(x_i) \approx y_i\} \quad (5)$$

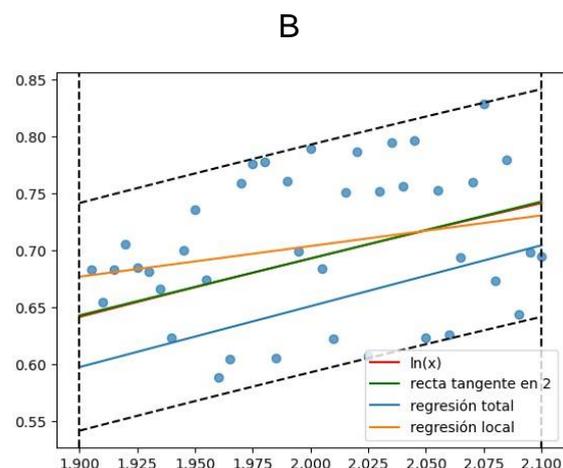
Expresado con vecindades, asumiendo I centrado en c resulta:

$$P_c = \{(x_i, y_i) | x_i \in V(c, \epsilon) \wedge y_i \in V(f(c), \delta)\} \quad (6)$$

A partir de P_c se buscó un polinomio que ajustara los puntos con el menor error posible. Para esto se empleó una regresión polinomial de grado d , donde a partir de la necesidad se cumplió con la condición: $d \in \{1, 2, 3, 4\}$. Debido a que se usaron polinomios cúbicos para la interpolación, se aplicó una regresión polinómica de grado $d = 3$. En la selección de los puntos de aproximación los resultados concluyeron exitosos para valores de $\epsilon \in [0.5, 1]$ con $\delta \leq 0.5$. (Figuras A y B)



A: Aproximación de $\ln'(2)$ con regresión lineal en un conjunto P_2 utilizando $\delta = 0.2$, $\epsilon_1 = 1$ y $\epsilon_2 = 0.05$.



B: Aproximación de $\ln'(2)$ con regresión lineal en un conjunto P_2 utilizando $\delta = 0.1$, $\epsilon_1 = 1$ y $\epsilon_2 = 0.1$